Проблемы физики, математики и техники, № 1 (10), 2012

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ НЕЕДИНИЧНЫХ ФОРМАЦИЙ

В.М. Селькин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ON ONE PROPERTY OF THE PRODUCT OF NON-IDENTITY FORMATIONS

V.M. Selkin

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Все рассматриваемые группы конечны. Произведением $\mathfrak{MH}$ формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ называется класс групп $\{G \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}\}$. Пусть $\mathfrak{MH} \subseteq \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ – наследственная однопорожденная ω-локальная формация и $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$ – две неединичные формации. Доказано, что если формация $\mathfrak{MH}$ является разрешимо ω-насыщенной и $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{MH}$, то $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\omega\mathfrak{N}$.

Ключевые слова: *однопорожденная наследственная ω-насыщенная формация, произведение формаций, минимальный ω-локальный спутник.*

All groups considered are finite. The product $\mathfrak{MH}$ of the formations $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{H}$ is the class $\{G \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}\}$. Let $\mathfrak{MH} \subseteq \mathfrak{F}$, where $\mathfrak{F}$ is a hereditary one-generated ω-saturated formation and $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$ be two non-identity formations. Suppose that $\mathfrak{MH}$ is a solubly ω-saturated formation. If $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{MH}$, then $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\omega\mathfrak{N}$.

Keywords: *one-generated hereditary ω-saturated formation, product of some formations, minimal ω-local satellite.*

Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ – это такой класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов, что каждая группа G имеет наименьшую нормальную подгруппу (обозначаемую через $G^{\mathfrak{F}}$), фактор-группа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$. Произведением $\mathfrak{MH}$ формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ называется класс групп $\{G \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}\}$.

Пусть p – простое число. Неединичная формация $\mathfrak{F}$ называется p-насыщенной, если из $G/O_p(\Phi(G)) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Неединичная формация $\mathfrak{F}$ называется разрешимо p-насыщенной, если из $G/\Phi(O_p(G)) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Если формация $\mathfrak{F}$ является p-насыщенной (разрешимо p-насыщенной) для всех $p \in \omega$, то $\mathfrak{F}$ называется ω-насыщенной (разрешимо ω-насыщенной) формацией [1], [2]. Пересечение всех разрешимо ω-насыщенных формаций, содержащих некоторую фиксированную группу G, называется однопорожденной разрешимо ω-насыщенной формацией. Заметим, что ω-насыщенные формации оказались полезными при изучении различных классов разрешимых групп [3]. В то же время, при изучении групп необязательно разрешимых, более полезными оказались разрешимо ω-насыщенные формации [4]. В данной работе докажем следующую теорему.

***Теорема* 0.1**. *Пусть $\mathfrak{MH} \subseteq \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ – наследственная однопорожденная ω-насыщенная формация и $\mathfrak{MH}$ такая разрешимо ω-насыщенная формация, что формации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ являются неединичными. Если $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{MH}$, то $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\omega\mathfrak{N}$.*

1 Предварительные результаты

Пусть ω – непустое множество простых чисел. Функцию f, имеющую вид

$$f : \omega \bigcup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\},$$

называют ω-локальным спутником [1]. Для произвольного ω-локального спутника f символом $LF_\omega(f)$ обозначают класс групп

$$(G \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p)$$
$$\text{для всех } p \in \omega \cap \pi(G)).$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ для некоторого ω-локального V-спутника f, то формация $\mathfrak{F}$ называется ω-насыщенной, а f – ω-локальный V-спутник этой формации. Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольная совокупность групп, то символ $s^\omega\text{form}(\mathfrak{X})$ обозначает пересечение всех наследственных ω-насыщенных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$. Спутник f называется минимальным ω-локальным спутником формации $\mathfrak{F}$, если для любого ω-локального спутника h формации $\mathfrak{F}$ выполняется $f(a) \subseteq h(a)$, для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

***Лемма* 1.1** (Лемма 5, [1]). *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– такая непустая совокупность групп, что* $\mathfrak{F}=s^{\omega}\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ *и* f *– минимальный наследственный* ω*-локальный спутник формации* $\mathfrak{F}$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $f(\omega') = s\mathrm{form}(G/O_{\omega}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(p) = s\mathrm{form}(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ *для всех* $p \in \omega$;

3) $f(p) = \varnothing$ *для всех* $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{X})$.

***Лемма* 1.2.** *Всякая формация порождается набором всех своих формационно критических групп.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}$ – множество всех формационно критических групп формации $\mathfrak{F}$. И пусть $\mathfrak{M} = \mathrm{form}(\mathfrak{X})$. Тогда $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$. Допустим, что G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{M}$. Тогда $G \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$, что невозможно. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. Лемма доказана.

***Лемма* 1.3.** *Если число всех неизоморфных формационно критических групп, принадлежащих формации* $\mathfrak{F}$, *конечно, то число всех подформаций этой формации является конечным.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}$ – множество всех неизоморфных формационно критических групп, принадлежащих формации $\mathfrak{F}$. И пусть $\mathfrak{M}$ – произвольная подформация формации $\mathfrak{F}$. Тогда по лемме 1.2, формация $\mathfrak{M}$ порождается набором $\mathfrak{X}_0$ всех своих формационно критических неизоморфных групп. Но поскольку $\mathfrak{X}_0 \subseteq \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$ – конечное множество, то существует лишь конечное множество таких наборов. Лемма доказана.

***Лемма* 1.4.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– разрешимая подформация однопорожденной формации* $\mathfrak{M}$. *Тогда множество всех собственных подформаций формации* $\mathfrak{F}$ *конечно.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{form}(G) = \mathfrak{M}$, где G – некоторая группа. Тогда ввиду леммы 1.2, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}(n)$. Значит, по теореме 3.47 [5], формация $\mathfrak{F}$ содержит конечное множество неизоморфных критических групп. Следовательно, ввиду леммы 1.3, формация $\mathfrak{F}$ имеет конечное множество подформаций. Лемма доказана.

***Лемма* 1.5** (Лемма 3.4, [6]). *Пусть* p *– простое число и* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, *где любая простая группа формации* $\mathfrak{M}$ *имеет порядок* p. *Тогда*

$$G = A^{\mathfrak{H}} \wr (A/A^{\mathfrak{H}}) \in \mathfrak{F}$$

для любой группы $A \in \mathfrak{F}$.

***Теорема* 1.1**. *Пусть* $\mathfrak{M}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, *где* $\mathfrak{F}$ *– наследственная однопорожденная* ω*-насыщенная формация. Если* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{H}$ *такие формации, что* $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, *то* $\mathfrak{M}$ *является разрешимой формацией.*

2 Доказательство теоремы 0.1

Пусть $\mathfrak{F} = s^{\omega}\mathrm{form}(G)$. Предположим, что $n = |G|$ и f – минимальный ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$.

Предположим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{N}$, и пусть группа D содержится $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{N}$. Тогда, ввиду теоремы 1.1, D – разрешимая группа. Пусть $\mathfrak{M}_0 = c_{\omega}\mathrm{form}(D)$. Тогда как и при доказательстве предложения А работы [6], можем видеть, что формация $\mathfrak{M}$ является ω-локальной формацией такой, что $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}$. Ввиду леммы 1.4, видим, что множество всех ω-локальных подформаций формации $\mathfrak{M}_0$ конечно.

Следовательно, формация $\mathfrak{M}_0$ имеет такую ω-локальную подформацию $\mathfrak{H}_0$, что $\mathfrak{H}_0 \not\subseteq \mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{N}$, но $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{N}$ для любой собственной ω-композиционной подформации $\mathfrak{H}_1$ формации $\mathfrak{H}_0$. Так как D – разрешимая группа, то формация $\mathfrak{M}_0$ является разрешимой. Отсюда следует, что формация $\mathfrak{M}_0$ и любая ω-композиционная подформация формации $\mathfrak{M}_0$ являются ω-локальными формациями.

Ввиду следствия 4.11 [7], имеем

$$\mathfrak{H}_0 = l_{\omega}\mathrm{form}(A),$$

где A – монолитическая группа с минимальной нормальной подгруппой $P = A^{\mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{N}}$ и либо $\pi = \pi(P) \cap \omega = \varnothing$, либо P – p-группа, где $p \in \omega$, и $A = [P]H$, где

$$P = C_G(P) = F(A) = F_p(A)$$

и $H = [Q]N$ является монолитической группой, $Q = C_H(Q) = O_q(H)$ – минимальная нормальная подгруппа группы H, причем $p \neq q \in \omega$ и N – неединичная нильпотентная группа.

Предположим, что для каждой группы $B \in \mathfrak{H}$ такой, что $|B| > n$, $\mathfrak{H}$-корадикал $D^{\mathfrak{H}}$ регулярного сплетения $D = A \wr B$ не содержится подпрямо в базе регулярного сплетения D. Тогда ввиду леммы 1.5, имеем группы $T \in \mathfrak{M}\mathfrak{H}$. Следовательно,

$$T^{\mathfrak{H}} \wr (T/T^{\mathfrak{H}}) \in \mathfrak{M}\mathfrak{H}$$

и p – такое простое число, что для любой простой группы A из $\mathfrak{M}$ имеем $|A| = p$.

Предположим, что $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{H}$, и пусть B – группа минимального порядка из $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{H}$. Пусть $R = B^{\mathfrak{H}}$ – минимальная нормальная подгруппа группы B. Так как $B \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$, то $B^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{N}_p$. Нетрудно видеть, что

$$R = Z_p \times \ldots \times Z_p \in \mathfrak{H}.$$

Если $B = R$, то R – абелева p-группа. Следовательно, ввиду леммы 3.5.20 [8],

$$B \in \mathrm{form}(Z_p \wr (B/R)),$$

где Z_p – группа порядка p. Если

$$Z_p \wr (B/R) \in \mathfrak{H},$$

то

$$B \in \mathrm{form}(Z_p \wr (B/R)) \in \mathfrak{H},$$

что противоречит выбору группы B. Значит, $Z_p \wr (B/R) \notin \mathfrak{H}$. Пусть

$$T = A \wr (B/R) = [K](B/R),$$

где K – база регулярного сплетения T. Используя лемму 3.5.20 [8] и тот факт, что $A \in \mathfrak{M}$, видим, что группа $T^{\mathfrak{H}}$ содержится подпрямо в группе $K \in \mathfrak{M}$. Поскольку $A \in \mathfrak{M}$, то $T^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$. Это показывает, что

$$T \in \mathfrak{M}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}.$$

Пусть

$$D = T^{|G|} = T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_{|G|},$$

где

$$T_1 \simeq T_2 \simeq \ldots \simeq T_{|G|} \simeq T.$$

Тогда, очевидно, $D \in \mathfrak{F}$. Значит,

$$E = D^{\mathfrak{H}} \wr (D/D^{\mathfrak{H}}) \in \mathfrak{F}.$$

Ясно, что $D^{\mathfrak{H}} \subseteq T_1^{\mathfrak{H}} \times T_2^{\mathfrak{H}} \times \ldots \times T_{|G|}^{\mathfrak{H}}$. Следовательно,

$$|D/D^{\mathfrak{H}}| \geq |T/T^{\mathfrak{H}}|^{|G|}.$$

Значит, $Z_p \in \mathfrak{H}$, $R \neq B$. Это показывает, что $|T/T^{\mathfrak{H}}| > 1$ и $t = |D/D^{\mathfrak{H}}| > |G|$.

Нетрудно видеть, что $T^{\mathfrak{H}} \neq 1$. Ввиду леммы 3.1.9 [8], группа T монолитична, и ее минимальная нормальная подгруппа имеет вид

$$L = P^{\natural} = \prod_{b \in B/R} P_1^b,$$

где P_1 – минимальная нормальная подгруппа первой копии группы A в группу K. Очевидно,

$$\mathrm{Soc}(D) = L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_{|G|},$$

где L_i – минимальная нормальная подгруппа группы T_i. Следовательно, для любой минимальной нормальной подгруппы K группы E выполняется $|K| \geq t > |G|$.

Пусть F – простая неабелева группа изоморфная композиционным факторам подгруппы $A^{\mathfrak{S}} = R$. Пусть Q – минимальная нормальная подгруппа группы $D^{\mathfrak{H}}$ и ее композиционные факторы неизоморфны F. Допустим, что Q – абелева p-группа. Тогда $O_p(D^{\mathfrak{H}}) \neq 1$. Так как

$$O_p(D^{\mathfrak{H}}) \mathrm{char} D^{\mathfrak{H}} \trianglelefteq D,$$

то $O_p(D^{\mathfrak{H}}) \trianglelefteq D$. Следовательно, существует такая минимальная нормальная подгруппа N группы D, что $N \subseteq O_p(D^{\mathfrak{H}})$. Значит, $N \simeq \mathrm{Soc}(T_1)$. Но у T_1 все композиционные факторы изоморфны группе F. Полученное противоречие показывает, что Q – неабелева группа и

$$Q = U \times U \times \ldots \times U,$$

где U неизоморфна F. Тогда $(D^{\mathfrak{H}})_Q \neq 1$, и так как

$$(D^{\mathfrak{H}})_Q \mathrm{char} D^{\mathfrak{H}} \trianglelefteq D,$$

то $(D^{\mathfrak{H}})_Q \trianglelefteq D$. Значит, существует какая минимальная нормальная подгруппа I группы D, что $I \subseteq (D^{\mathfrak{H}})_Q$. Следовательно, $I \simeq \mathrm{Soc}(T_1)$. Противоречие. Таким образом, у группы $D^{\mathfrak{H}}$ все композиционные факторы изоморфны F. Значит, каждая минимальная нормальная подгруппа группы $D^{\mathfrak{H}}$ и любая минимальная нормальная подгруппа X группы E являются неабелевыми группами, чьи композиционные факторы изоморфны композиционным факторам группы P.

Предположим, что $p \in \pi(P) \cap \omega$. Тогда $F_p(E) = 1$, и

$$E \simeq E/F_p(E) \in f(p) = \mathrm{sform}(G/F_p(G)).$$

Но

$$|X| \geq |P|^t > |G|,$$

где X – минимальная нормальная подгруппа группы E, что противоречит лемме 3.1.5 [8]. Пусть $\pi(P) \cap \omega = \varnothing$. Тогда $O_\omega(E) = 1$, и

$$E \simeq E/O_\omega(E) \in f(\omega') = \mathrm{sform}(G/O_\omega(G),$$

что также противоречит лемме 3.1.5 [8]. Таким образом, $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}$, и, следовательно, $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$.

Пусть G – группа минимального порядка из $\mathfrak{M}\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда группа G монолитична, и ее монолит $R = G^{\mathfrak{H}}$. Так как

$$R = A_1 \times \ldots \times A_t,$$

где $A_1 \simeq \ldots \simeq A_t \simeq A$ – простая группа, и $G \in \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, то

$$G^{\mathfrak{H}} = R = A_1 \times \ldots \times A_t \in \mathfrak{H}.$$

Значит, $A \in \mathfrak{M}$, то ввиду леммы 3.1 [6], $|A| = p$, и R является p-группой. Следовательно,

$$G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{H} = \mathfrak{H}.$$

Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$.

Так как равенство $\mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$ противоречит условию теоремы, то данное противоречие показывает, что группа B принадлежит формации $\mathfrak{H}$, причем $|B| > n$ и $\mathfrak{H}$-корадикал $D^{\mathfrak{H}}$ регулярного сплетения $D = A \wr B$ содержится подпрямо в группе K. Следовательно, $D \in \mathfrak{M}\mathfrak{H}$. Ввиду леммы 3.1.9 [8], группа D является монолотической с минимальной нормальной подгруппой R, совпадающей с $P^{\natural} = \prod_{b \in B} P_1^b$, где P_1 – минимальная нормальная подгруппа первой копии группы A в группе K. Если $\pi = \varnothing$, то $O_{\omega}(D) = 1$, и по лемме 1.1, имеем

$$D \simeq D / O_{\omega}(D) \in f(\omega') = \mathrm{sform}(G / O_{\omega}(G)).$$

С другой стороны, нетрудно видеть, что группа D имеет минимальную нормальную подгруппу R с порядком

$$|P|^{|B|} \geq |P|^n > n,$$

что противоречит лемме 3.1.5 [8]. Значит, $\pi \neq \varnothing$.

Нетрудно показать, что $R \not\subseteq \Phi(D)$. Значит, существует такая максимальная подгруппа M группы D такая, что $RM = D$ и $C = C_D(R)$. Таким образом,

$$C = C \cap RM = R(C \cap M).$$

Очевидно, $C \cap M \trianglelefteq D$. Следовательно, $C = R$ и $F_p(D) = R$. Так как

$$D \in \mathfrak{M}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F},$$

то ввиду леммы 1.1, имеем

$$D / F_p(D) = D / R \in f(p) = \mathrm{sform}(G / F_p(G)).$$

Ввиду [9, A, (18.2)], имеем

$$D / R \simeq (A / P) \wr B \simeq H \wr B.$$

Таким образом, $H \wr B \in \mathrm{sform}(G / F_p(G))$.

Тем не менее, группа $H \wr B$ имеет минимальную нормальную подгруппу с порядком

$$|Q|^{|B|} \geq |Q|^n > n.$$

Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{N}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков, Л.А.* Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба // Математические труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.

2. *Скиба, А.Н.* Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинский мат. журнал. – 2000. – № 52 (6). – С. 783–797.

3. *Ballester-Bolinches, A.* On lattices of p-local formations of finite group / A. Ballester-Bolinches, L.A. Shemetkov // Math. Nachr. – 186 (1997). – P. 57–65.

4. *Shemetkov L.A.* On partially saturated formations and residuals of finete groups / L.A. Shemetkov // Comminication in algebra. – 2001. – 29 (9). – P. 4125–4137.

5. *Шеметков, Л.А.* Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М. : Наука, 1989. – 253 с.

6. *Go, W.* Factorization theory of onegenerated Bear ω-local formations / W. Go, V.M. Selkin, K.P. Sham // Communications in Algebra. – 2007. – Vol. 35. – P. 2901–2931.

7. *Sel'kin, V.M.* One-generated formations and their factorizations / V.M. Sel'kin. – Gomel, 2002. – 13 c. – (Preprint / GGU im. F. Skoriny : № 24).

8. *Скиба, А.Н.* Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.

9. *Doerk, K.* Finite soluble group / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de gruyter, 1992. – 889 p.

Поступила в редакцию 10.01.12.